Für die Wiederaufnahme der Arbeitszeitrechnungsdebatte*

von Helmut Dunkhase

1 Einleitung

Über die Marxsche Arbeitswerttheorie wird auch heute, allem Augenschein zum Trotz, an vielen Ecken der Welt diskutiert. Schlägt man eine Arbeit auf, die sich mit ihr mit grundsätzlich positivem Bezug beschäftigt, geht es darin allerdings mit hoher Wahrscheinlichkeit um eine „kritische Rekonstruktion“ der Marxschen Lehre oder um Versuche die Arbeitswerttheorie für die Analyse des gegenwärtigen Kapitalismus fruchtbar zu machen. Auffallend wenig Bewegung ist dagegen in der Frage, ob oder inwiefern das Wertgesetz im Sozialismus wirksam wird. Vorherrschende Meinung scheint zu sein, dass Warenproduktion auch im Sozialismus auf unabsehbare Zeit unumgänglich ist. Eine Aufhebung der Warenproduktion und damit der Gültigkeit des Wertgesetzes wird allenfalls verknüft mit nebulösen Andeutungen über notwendig neue Qualitäten sozialistischer Produktion, ohne dass irgendwelche greifbaren Bedingungen für die Qualitäten angegeben werden.[1] Faktisch wird damit der Übergang zur Produktionsweise „frei assoziierter Produzenten“ auf den Sankt Nimmerleinstag verlegt. Der Sozialismus, als erste Stufe des Kommunismus, ist im Bewusstsein der meisten Werttheoretiker offenbar in so weite Ferne gerückt, dass selbst Arbeiten, die die Werttheorie in einer Weise thematisieren, die sie ihrer Gebundenheit an eine warenproduzierende Gesellschaft entledigt, nämlich als Arbeitsquantentheorie,[2] keineswegs über den Horizont des real existierenden Kapitalismus hinausweisen.

Es gibt aber auch einen dünnen und löchrigen Diskussionsstrang innerhalb des Marxismus darüber, wie eine geplante sozialistische Ökonomie jenseits der Warenproduktion zu bewerkstelligen sei, der anknüpft an eine interessante Antwort, die Marx in seiner „Kritik des Gothaer Programms“ gegeben hat.[3]

Die Owensche Vorstellung eines „Arbeitsgeldes“, das die Dauer des von den einzelnen Arbeitern geleisteten Arbeit direkt repräsentiert, bleibt „seichte Utopie“, solange die Produkte als Waren produziert werden. Der Austausch des Arbeitsquantums, das der Arbeiter in der Produktion der Ware verausgabt, gegen eine Ware gleichen Quantums, die er benötigt, setzt voraus, dass sich die Produkte unmittelbar als Produkte gesellschaftlicher Arbeit aufeinander beziehen. Als Waren können sie sich aber nur mittelbar, im Tausch, als gesellschaftliche Arbeit erweisen. Von der zur Grundlage der Zertifikate gemachten Arbeit weiß man weder, ob sie überhaupt gebraucht wurde noch ob ihr Quantum das gesellschaftlich notwendige war. Erst „innerhalb der genossenschaftlichen, auf Gemeingut an den Produktionsmitteln gegründeten Gesellschaft“, in der die

*Überarbeitete Fassung des Vortrags auf der Tagung der Marx-Engels-Stiftung zum Thema „Wertgesetz und Sozialismus“ am 5. Oktober 2003. Ich danke Ansgar Knolle-Grothusen für kritische Anmerkungen, auch wenn ich nicht allen folgte.

[1] Hier treffen sich Autoren, die den sozialistischen Ländern ablehnend gegenüber standen und stehen wie Michael Heinrich (Heinrich 2001) mit Vertretern, die aus ehemals sozialistischen Ländern kommen.

[2] so Quaas (2001)

[3] Dabei kümmert mich wenig, ob es sich um den „esoterischen“ oder „exoterischen Marx“ handelt. Es geht um einen Vorschlag, der unabhängig von der dahinterstehenden Autorität zu prüfen ist.

Produzenten ihre Produkte nicht mehr austauschen und die auf Produkte verwandte Arbeit ebensowenig als Wert erscheint, können „die individuellen Arbeiten nicht mehr auf einem Umweg, sondern unmittelbar als Bestandteile der Gesamtarbeit existieren.“[4]

> „Demgemäß erhält der einzelne Produzent - nach den Abzügen - exakt zurück, was er ihr gibt. Was er ihr gegeben hat, ist sein individuelles Arbeitsquantum. Z.B. der gesellschaftliche Arbeitstag besteht aus der Summe der individuellen Arbeitsstunden. Die individuelle Arbeitszeit des einzelnen Produzenten ist der von ihm gelieferte Teil des gesellschaftlichen Arbeitstages, sein Anteil daran. Er erhält von der Gesellschaft einen Schein, dass er soundso viel Arbeit geliefert (nach Abzug seiner Arbeit für die gemeinschaftlichen Fonds), und zieht mit diesem Schein aus dem gesellschaftlichen Vorrat von Konsumtionsmitteln soviel heraus, als gleich viel Arbeit kostet. Dasselbe Quantum Arbeit, das er der Gesellschaft in einer Form gegeben hat, erhält er in der andern zurück.“[5]

Die Idee ist also, dass die Summe der ausgegebenen Arbeitsmarken der verausgabten lebendigen Arbeit entspricht - minus den Abzügen für Akkumulation, soziale Versorgung, usw.. Dies erfordert eine Planung der Produktion und Verteilung der Konsumgüter auf der Grundlage einer Arbeitszeitrechnung.

Was die Machbarkeit dieses Konzeptes angeht, machte sich unter westlichen Marxisten bald Skepsis breit (die bis heute anhält!) und wurde nicht weiter verfolgt. Zwei zentrale Argumente gegen die Möglichkeit einer rationalen sozialistischen Planung wurden vom bürgerlichen Ökonomen Ludwig von Mises 1920 in seiner Schrift „Wirtschaftsrechnung im sozialistischen Gemeinwesen“ vorgetragen[6], die bis heute auf der Tagesordnung stehen. Zwar hält von Mises die Arbeitszeit für den einzig möglichen Kandidaten, der als Grundlage für ökonomische Berechnungen in Frage kommt, verwirft aber schließlich das Arbeitswertkonzept aus hauptsächlich zwei Gründen: 1. Es sei irrational, dass die Naturressourcen nur insofern in die Berechnung eingehen, als es Arbeitszeit kostet, sie der Natur zu entziehen und 2. Die Arbeitswerttheorie könne der Heterogenität der Arbeit nicht gerecht werden. In der späteren Diskussion kommt noch das Argument der hoffnungslos großen Komplexität der Verflechtung einer Volkswirtschaft hinzu.

Von Mises' Aufsatz trug offenbar sehr dazu bei, dass im westlichen Marxismus über eine ökonomische Konzeption des Sozialismus nur noch in Form eines wie auch immer gearteten „Marktsozialismus“, unter Rückgriff auf neoklassische Theorien (Walras, Pareto u.a.), nachgedacht wurde.[7] Eine ruhmreiche

[4] Marx (1969), S. 19/20

[5] Marx (1969), S. 20

[6] v. Mises (1920). Wie sehr von Mises diese Arbeit nach dem Sieg der Bolschewiki im Bürgerkrieg als - wie sich herausstellen sollte, wirksamen - Beitrag im Klassenkampf in der Theorie verstand, geht aus seinem Vorwort hervor: „In einer Zeit, da wir uns dem Sozialismus immer mehr und mehr nähern, ja in gewissem Sinne schon in ihm mitten drin stehen, gewinnt die Untersuchung der Probleme der sozialistischen Wirtschaft auch Bedeutung für. die Erklärung dessen, was um uns herum vorgeht. Für das Verständnis der volkswirtschaftlichen Erscheinungen des heutigen Deutschland und seiner östlichen Nachbarländer reicht das, was uns die Analyse der Verkehrswirtschaft an die Hand gibt, lange nicht mehr aus. Wir müssen hier schon in recht beträchtlichem Umfange Elemente des sozialistischen Gemeinwesens heranziehen. Versuche, sich über das Wesen der sozialistischen Wirtschaft Klarheit zu verschaffen, bedürfen unter solchen Umständen keiner besonderen Rechtfertigung.“

[7] In *Neue Beiträge zum Problem der sozialistischen Wirtschaftsrechnung* (1923) meint er

Ausnahme bildete die Gruppe Internationaler Kommunisten, die 1930 in ihrer Arbeit „Grundprinzipien kommunistischer Produktion und Verteilung“ die gemeinschaftliche Planung und Buchführung auf der Grundlage der Arbeitszeitrechnung verteidigte.[8]

Eine Sonderrolle spielte Oskar Lange, der in „Ökonomische Theorie des Sozialismus“, 1938, von Mises zwar darin Recht gab, dass Planung auf der Grundlage von Arbeitswerten unmöglich ist, später aber die Gültigkeit dieser Aussage vom Entwicklungsstand der Computertechnik abhängig machte. Lange entwarf ein neoklassisches Modell „simulierter Märkte“ auf der Grundlage von Gemeineigentum. Analog zum Walrasschen Auktionator[9] bestimmt die Planungsbehörde die korrekten Austauschrelationen.

Im Unterschied zum Westen geriet in der Sowjetunion die Arbeitszeitrechnung nicht völlig in Vergessenheit. Dies war vor allen das Verdienst des Ökonomen und Statistikers S.G. Strumilin. Dieser schlug 1920 Arbeitseinheiten als Planungsgrundlage vor, was das zentrale statistische Amt aber nicht in den Griff bekam.[10] Die Maßeinheit „Tred“ (= trudowaja jedinitza) bezog sich auf die Qualifikation für die Tariflohngruppe 1.[11] Er stellte numerische Modelle für die Berechnung des Nutzeffektes der Volksbildung oder der lebendigen Arbeit bei der Projektierung von Investitionen auf und schlug vor, das jährliche Bruttoprodukts in Gebrauchswerteinheiten zu bewerten, wobei ihm als geeignete Einheit die Jahresration eines Arbeiters, die einen bestimmten, wissenschaftlich begründeten Warenkorb repräsentiert, vorschwebte.[12] 1960 wurde ein Arbeitszeitrechnungsmodell mit 157 Produkten ausprobiert, was natürlich noch keine große praktische Relevanz hatte.[13]

Es war, nun schon nach dem Untergang der Sowjetunion, zwei schottischen Wissenschaftlern, Paul Cockshott (Computer Science) und Allin Cottrell (Ökonom) vorbehalten, die Debatte kräftig voranzutreiben mit der Veröffentlichung

---

den „marxistischen Parteiliteraten“ nun die weitere Beschäftigung mit dem Problem der Wirtschaftsrechnung im Sozialismus aufgezwungen zu haben und zitiert mit Genugtuung Kautsky, der nun endlich eingesehen habe, dass es mit der Arbeitszeitrechnung nicht gehen kann: SStatt sich an die hoffnungslose Arbeit zu machen, fließendes Wasser mit einem Sieb zu messen - und dieser Art wäre die Konstituierung des Wertes -, wird sich das proletarische Regime für die Zirkulation der Waren an das halten, was es greifbar vorfindet: ihre historisch gewordenen Preise, die heute in Gold gemessen werden, was selbst die weitestgehende Inflation nur verschleiern und verzerren, nicht aber aufheben kann. Was selbst der ungeheuerste und vollkommenste statistische Apparat nicht zu leisten vermöchte, die Schätzung der Waren nach der in ihnen enthaltenen Arbeit, das finden wir in den überkommenen Preisen als Ergebnis eines langen historischen Prozesses gegeben vor, unvollkommen und ungenau, aber als einzig mögliche Grundlage für möglichst glattes und leichtes Weiterfunktionieren des ökonomischen Zirkulationsprozesses.“ Kautsky, Die proletarische Revolution und ihr Programm, 2. Aufl., Berlin und Stuttgart 1922, S. 321.)

[8] http://www.mxks.de/files/kommunism/gik.html

[9] „Der Auktionator ruft die Preise aus und die Unternehmen und Haushalte nenne ihm ihre Angebots- und Nachfragepreise in Abhängigkeit von diesen Preisen. Der Auktionator korrigiert die Preise so lange, bis alle Transaktionswünsche miteinander im Einklang stehen. Dann gibt er den Markt frei und erst jetzt, also *nachdem* die Gleichgewichtspreise bekannt sind, werden die verschiedenen Transaktionen durchgeführt. Auf einem wirklichen Markt findet der Tausch aber statt, ohne dass die Gleichgewichtspreise bekannt sind. Das Auktionatormodell wird daher auch als Metapher für 'sehr schnelle' Preisanpassungen verstanden.“ (Heinrich (2001), S.74)

[10] Cockshott/Cottrell (1993a), S.28

[11] Nemtschinow (1965), S.148

[12] Nemtschinow (1965), S.146

[13] Cockshott/Cottrell (1993a), S. 28

ihres Buches *Towards a new Socialism*[14], in dem sie die Planung und Kontrolle eines sozialistischen ökonomischen Systems auf der Basis der Arbeitszeitrechung unter Ausnutzung moderner wissenschaftlich-technischer Möglichkeiten und die Grundzüge eines adäquaten Überbaus entwickelten. Sein Erscheinungsjahr,1993, konnte ungünstiger nicht sein. Ein Grund vielleicht, dass es, in unsern Landen zumindest, bis heute praktisch unbekannt ist.

2 Der wissenschaftliche Status des Wertgesetzes

2.1 Warenproduktion und Werttheorie

„Die Nützlichkeit eines Dings macht es zum Gebrauchswert.“ (MEW 23,49). Da die Menschen, solange sie produzieren, nützliche Dinge herstellen, werden Gebrauchswerte ihr Dasein auf ewig bestimmen: „Gebrauchswerte bilden den stofflichen Inhalt, welches auch immer seine gesellschaftliche Form sei.“ (ebd.) Gebrauchswert ist so etwas wie der Grad der Nützlichkeit eines Dings. Das Wort „Wert“ bezeichnet hier also nicht eine Quantität.

Das *Produktionsmodell Familie/Sippe* ist gekennzeichnet durch *direkte* Absprache von Tätigkeiten, die unter einem *gemeinsamen* Plan subsummiert sind. Die hergestellten Dinge sind dadurch *a priori* nützlich. Die Aneignung ist eine gemeinsame, die Partizipation der Einzelnen an den Produktionsergebnissen geschieht durch *Zuteilung*. Wir nennen diese Art des Zusammenwirkens *Kooperation*. Durch sie wird *Gemeinschaft* konstituiert. Der Bereich der Kooperation erstreckt sich auf das sinnlich Wahrnehmbare (soweit das Auge reicht).

„Vergesellschaftete“ Produktion: Mit zunehmender Arbeitsteilung werden die Produktionsräume weiter. „Arbeitsteilung“ heißt (immer noch) die Existenz von Teilarbeiten, die objektiv Teil eines Ganzen, der Gesamtproduktion sind. Diese Teilarbeiten können nicht mehr abgesprochen werden. Man kennt sich auch nicht mehr. Die höhere Komplexität der Produktion muss auf neue Weise bewältigt werden. Da auf direktem Wege nicht mehr festgestellt werden kann, ob die einzelnen Produzenten nützliche Dinge hervorgebracht haben, geht dies nur noch indirekt, abgetrennt von der Gemeinschaft: *privat*. Das indirekte Kommunikationsmedium ist ein neugeschaffener, *öffentlicher Raum*, der *Markt*, zu dem der nun private Produzent seine Dinge trägt. Erst hier, *a posteriori*, erweist sich die Nützlichkeit der Dinge - indem sie für einen Anderen nützlich sind. Ist die Produktion kommunikativ abgetrennt von der Gemeinschaft, kann auch die *Aneignung* des einzelnen Produzenten nur eine *private* sein - und eine indirekte: Sie kann nicht mehr wie bisher über eine Zuteilung laufen, sondern darüber, dass ihm ein Anderer ein anderes Ding, das für ihn selbst nützlich ist, überlässt, d.h. über einen *Tausch*[15]. Ein auf solche Weise produziertes Ding heißt *Ware*.

Ein Händewechsel der Dinge durch Tausch setzt einen *Vergleich* voraus. Jeder Vergleich ist ein Abstraktionsvorgang; er fragt nämlich nach der Gleichheit hinsichtlich der Eigenschaft x. Dabei wird von allen anderen Eigenschaften abgesehen (abstrahiert). „Eigenschaft x“ könnte Größe, Gewicht, subjektive Attraktivität, usw. sein. Als dauerhaft wiederholbar kommt nur die Relation „gleich hinsichtlich des verausgabten Zeitquantums konkreter Arbeit“ in Frage.

[14] Cockshott/Cottrell (1993b)

[15] Da ich keine semantische Differenz zwischen „Tausch“ und „Austausch“ gefunden habe, d.h. keine sprachliche Situation, in der man nicht „Tausch“ durch „Austausch“ gegenseitig ersetzen kann, behandle ich die beiden Wörter als synonym.

Andernfalls wäre einer der Tauschpartner übervorteilt. Die Zeitdauer der konkreten Arbeit heißt *abstrakte Arbeit*. Damit ein Ding „gesellschaftsfähig“, d.h. zur Ware werden kann, müssen alle seine konkreten Seiten auf den einzigen Parameter „Zeit“ abgebildet werden. Das Ergebnis der konkreten Arbeit ist der Gebrauchswert der Ware (falls sie sich als nützlich für Andere erweist).

Der einfache Warentausch stiftet noch kein gesellschaftliches Verhältnis, sondern nur eines zwischen zwei Tauschpartnern, das auch nur für den Tauschakt anhält. 1 Rock = 20 Ellen Leinwand.

Um einen Überbegriff zu „Gemeinschaft“ und „Gesellschaft“ zur Verfügung zu haben, führen wir den Begriff „Agglomeration von Menschen“ ein.

Ein gesellschaftlicher Zusammenhang ist erst hergestellt, wenn die Produzenten einer Agglomeration von Menschen sich ihre Einzelarbeit als Teil der konkreten Gesamtarbeit versichern und sich den aliquoten Anteil ihrer verausgabten Arbeit als abstrakte Arbeit an der insgesamt verausgabten Arbeit aneignen können. Stellt sich das Zusammenwirken, der Produktionszusammenhang auf diese Weise, über Tauschbeziehungen her, konstituiert sich *Gesellschaft*.

2.2 Das Wertgesetz: Ein Erhaltungssatz

Wenn Produzent A die Ware x_1 produziert und die Ware x_2 braucht, Produzent B die Ware x_2 produziert und die Waren x_3 braucht, Produzent Z die Ware x_3 produziert und die Ware x_1 braucht usw., dann ist die Existenz eines öffentlichen Kommunikationsmediums, des Marktes, noch keine hinreichende Bedingung für eine dauerhafte Reproduktion des gesellschaftlichen Austauschprozesses. Nicht nur, dass die verschiedenen Arbeitsquanten i.A. keine Vielfachen voneinander sind und somit schwer ausgetauscht werden können, es ließen sich die erforderlichen Operationen unter Beibehaltung der einfachen Wertform nur durch Ringtausche realisieren. Erforderlich ist eine allgemeine Wertform, die Äquivalentform.

Die Entwicklung von der einfachen zur allgemeinen Wertform lässt sich auf folgende Weise „logisch rekonstruieren“. Angenommen, wir hätten es mit einer Ökonomie von 4 Waren zu tun: Leinwand, Rock, Tee, Kaffee und es gelte: 20 Ellen Leinwand ist Tauschwert von 1 Rock, 20 Ellen Leinwand ist Tauschwert 10 Pfund Tee, 20 Ellen Leinwand ist Tauschwert von 40 Pfund Kaffee. Halten wir en passant fest, dass „ist Tauschwert von“, in Zeichen: „$=_T$“ keine Eigenschaft einer Ware, sondern eine Relation ist. Natürlich gilt dann auch 1 Rock $=_T$ 20 Ellen Leinwand, 10 Pfd. Tee $=_T$ 20 Ellen Leinwand, 40 Pfd. Kaffee $=_T$ 20 Ellen Leinwand und 20 Ellen Leinwand $=_T$ 1 Rock $=_T$ 10 Pfd. Tee $=_T$ 40 Pfd. Kaffee. D.h. „$=_T$“ ist eine Quasi-Äquivalenzrelation[16]. Waren, genauer: Quantitäten von Waren, die in Tauschrelation zueinander stehen, bilden Äquivalenzklassen. Wenn wir M als Menge von Quantitäten, x_1 Leinwand, x_2 Rock, x_3 Tee, x_4 Kaffee auffassen, dann gehört jede Warenquantität genau einer Äquivalenzklasse an; denn mit 20 Ellen Leinwand $=_T$ 1 Rock $=_T$ 10 Pfd. Tee $=_T$ 40 Pfd. Kaffee gilt auch 60 Ellen Leinwand $=_T$ 3 Rock $=_T$ 30 Pfd. Tee $=_T$ 120 Pfd. Kaffee, usw..

[16] Eine Äquivalenzrelation R auf einer Menge M ist eine Relation (eine Paarbildung von Elementen von M), die den Bedingungen 1. xRx (Reflexivität), 2. Aus xRx folgt yRx (Symmetrie) und 3. Aus xRy und yRz folgt xRz (Transitivität). Die Relation $=_T$ erfüllt Bedingung 1. nicht (eine Ware ist nicht mit sich selbst tauschbar), deshalb Quasi-Äquivalenzrelation.

Wir fassen nun die gesamte Warenansammlung als Menge von n Quantitäten.[17] Jede der n Quantitäten liegt in genau einer Äquivalenzklasse. Alle Äquivalenzklassen sind in „natürlicher Weise“ aus einer bekannten Äquivalenzklasse erzeugbar: Angenommen, es wird, wie in unserm Beispiel, die Äquivalenzklasse 20 Ellen, 1 Rock, 10 Pfd., 40 Pfd., kurz: (20,1,10,40) festgestellt. Dann ergeben sich alle Äquivalenzklassen durch (λ 20, λ 1, λ 10, λ 40) (mit $\lambda \in \mathbb{R}$), oder: λ(20,1,10,40). Der Parameter λ, das ist die Marxsche und marxistische These, hängt linear ab von der verausgabten Arbeitszeit für ein Vielfaches eines als Numéraire gewählten Repräsentanten einer Äquivalenzklasse und stellt den Wert (dieses Vielfachen eines als Numéraire gewählten Repräsentanten und aller anderen Mitglieder seiner Äquivalenzklasse) dar.

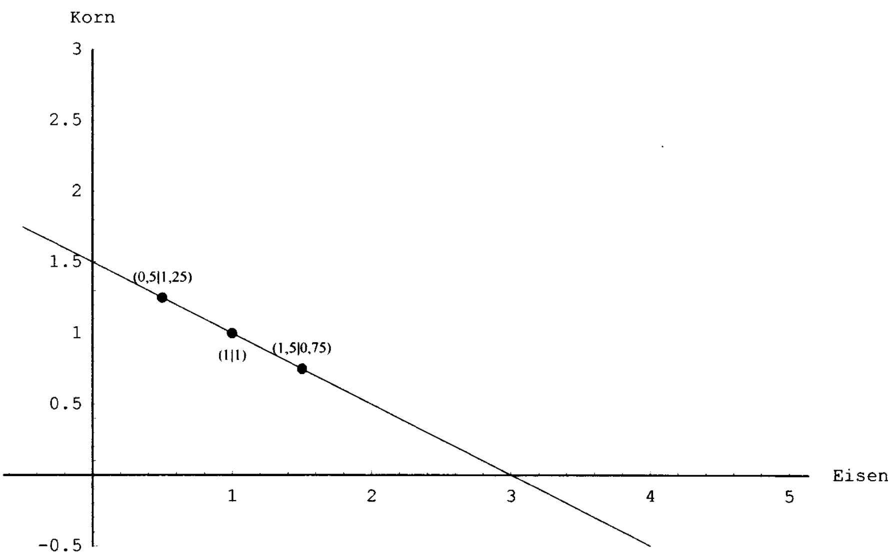

Abb. 1:

Wie lässt sich nun die Regelung der stofflichen Umwandlungsprozesse und Rekombinationen durch den Wert fassen? Dazu fassen wir den Warenbündelraum als Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ auf. Ein Punkt des Raumes stellt eine bestimmte Kombination der n Quantitäten dar. Bei einem Bündel von 2 Waren, Eisen und Korn, lässt sich, wenn z. B. die Äquivalenz 2 Einheiten Eisen $=_T$ 1 Einheit Korn zu Grunde gelegt wird, das Bündel (1 Eisen; 1 Korn) austauschen gegen das Bündel (0,5 Eisen; 1,25 Korn) oder (1,5 Eisen; 0,25 Korn), usw.. Jeder Tausch liefert eine neue stoffliche Rekombination. Alle möglichen Rekombinationen des Warenbündels (1;1) liegen auf einer Geraden im $\mathbb{R}^2$ (siehe Abb.1).

Bei jeder dieser Rekombinationen bleibt der Wert des Bündels erhalten. Alle Punkte der Geraden repräsentieren den gleichen Wert (Isovalenz). Wir können deshalb sagen: Die Isovalen des Warenbündelraumes lassen sich im 2-dimensionalen Warenbündelraum als Geraden, im n-dimensionalen als Hyper-

[17] nicht zu verwechseln mit dem $\mathbb{R}^n$! Falls man sich eine Äquivalenzklasse aber als Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ vorstellt, dann handelt es sich um eine Menge von Punkten (keine n-Tupel) auf den Koordinatenachsen.

ebene beschreiben. Die Geraden bzw. Hyperebenen lassen sich ins Negative fortsetzen, wenn man sie ökonomisch als so genannte Budgetlinien interpretiert.

Jedem Punkt *(x,y)* der Ebene lässt sich der Wert des zugehörigen Warenbündels zuordnen. Wie lässt sich feststellen, ob und wie sich zwei Punkte wertmäßig unterscheiden bzw. welchen wertmäßigen „Abstand" sie voneinander haben? Er hängt davon ab, auf welcher der (von der Äquivalenzrelation induzierten) Geraden sie liegen.

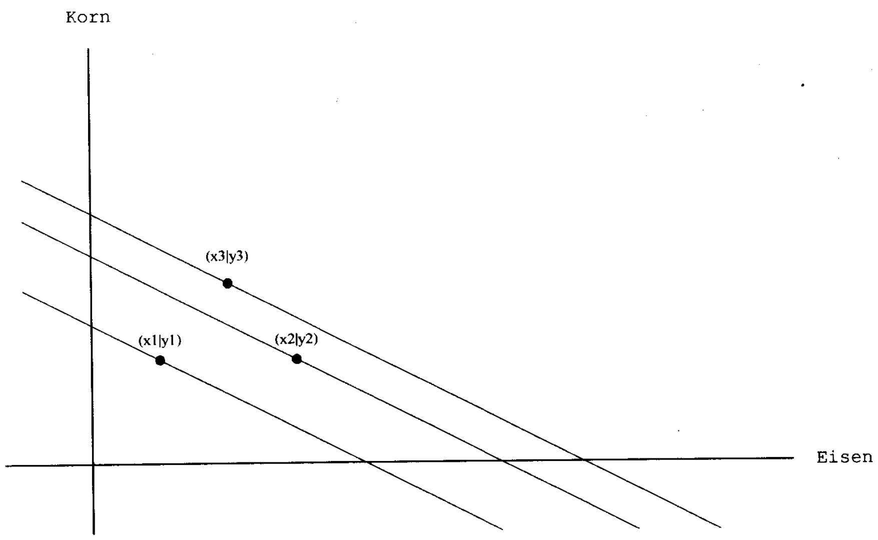

Abb. 2:

Wenn wir den Abstand zweier Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) mit d bezeichnen, stellen wir fest:

$$d\left((x_1, y_1), (x_2, y_2)\right) = d\left((x_2, y_2), (x_1, y_1)\right)$$

und, für einen dritten Punkt (x_3, y_3),

$$d\left((x_1, y_1), (x_2, y_2)\right) \leq d\left((x_1, y_1), (x_3, y_3)\right) + d\left((x_3, y_3), (x_2, y_2)\right).$$

(In unserm Fall gilt stets „=".) Wenn wir zudem noch die Selbstverständlichkeit notieren, dass

$$d\left((x, y), (x, y)\right) = 0$$

ist, haben wir alle Bedingungen für eine Metrik zusammen.[18]

ϵ-Umgebungen eines Punktes p, d.h. Umgebungen, von Punkten mit gleichem Abstand ϵ von p begrenzt werden, sind unendlich ausgedehnte Streifen, die durch parallele Geraden begrenzt werden. Dies ist keine euklidische

[18] Ein metrischer Raum (M, d) ist ein Raum mit einer Metrik, d.h. mit einer nicht-negativen reellwertigen Funktion d auf $M \times M$, die die Eigenschaften

(1) $d(p, q) = 0 \Leftrightarrow p = q$

(2) $d(p, q) = d(q, p)$

(3) $d(p, q) \leq d(p, r) + d(r, q)$ für beliebige Punkte $p, q, r \in M$ hat.

Metrik (an die wir uns so gewöhnt haben und deren ϵ-Umgebungen Kreise bzw. Kugeln sind) mehr. Sie lässt sich beschreiben durch $d\left(\left(x_1, y_1\right), \left(x_2, y_2\right)\right) = \left|\alpha\left(x_2 - x_1\right) + \beta\left(y_2 - y_1\right)\right|$, wobei α und β Konstanten sind. Für $\alpha = 2$ und $\beta = 1$ ergibt sich z. B. eine Metrik, die der Situation in unserem Beispiel entspricht. Alle Punkte auf der Geraden, die den Punkt (1;1) enthält, haben vom Ursprung den Abstand $d = 3$. In dieser Metrik gehört zu einer Nullumgebung neben der eingetragenen Geraden eine zweite, konjugierte Isovale, denn auch für (-0,5;-1,25), (-1:-1) usw. gilt $d(p, 0) = 3$ (Abb.3).

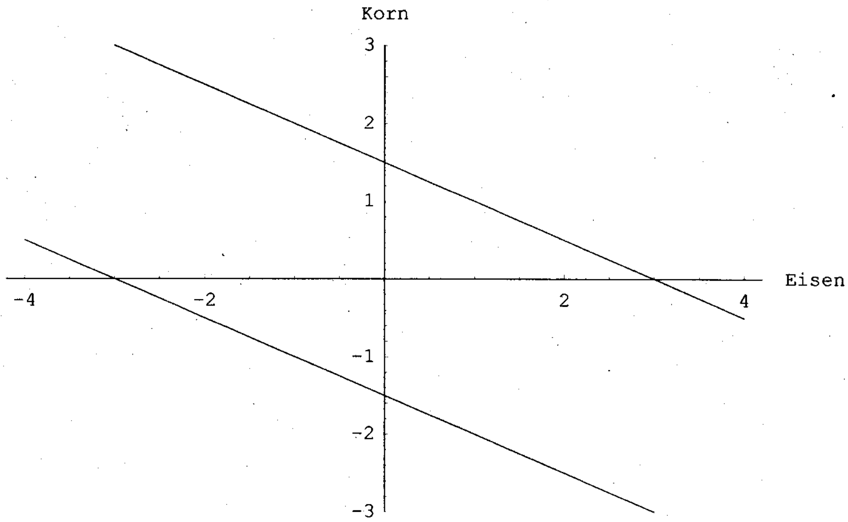

Abb. 3:

Die konjugierte Isovale lässt sich ökonomisch interpretieren im Sinne der doppelten Buchführung: Jedes Guthaben erscheint auch als Schulden in der gleichen Aufstellung.

Punkte auf einer Isovale sind seiner Konjugierten haben vom Ursprung den gleichen Abstand, sind aber nicht austauschbar. Klar, denn ein Guthaben von 1 € wird niemand gegen eine Schuld von 1 € tauschen wollen.

Tieferen Einblick in die Beschaffenheit des Warenbündelwertraumes gibt die Antwort auf die Frage, warum dieser keine Euklidische Metrik besitzen kann. Angenommen, der Warenbündelraum hätte eine Euklidische Metrik. Dann wären die Isovalen Kreise bzw. Kugeln um den Ursprung. So ließen sich, wenn sich 1 Einheit Eisen gegen 1 Einheit Korn tauschen, das Warenbündel (1;0) gegen das Warenbündel (0;1) oder $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ austauschen; alle isovalen Warenbündel liegen dann auf dem Einheitskreis und jede isovale Transformation ließe sich mathematisch durch einen unitären Operator, d.h. einen Operator, der den Abstand erhält, beschreiben.[19] Der ökonomischen Realität hält dieses Modell

[19]So überführt der unitäre Operator $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, der eine Linksdrehung um 45^o repräsentiert, die Kombination (1;0) in die Kombination $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

jedoch nicht stand. Die Bestandteile eines Warenbündels müssen auch separat getauscht werde können. Ein Warenbündelagent könnte das Warenbündel (0;1) gegen das Warenbündel $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ eintauschen. *Ökonomisch* könnte er dann auch $\frac{1}{\sqrt{2}}$ Eisen gegen $\frac{1}{\sqrt{2}}$ Korn tauschen. Dies widerspricht jedoch der Euklidischen Metrik, denn nach diesem Tausch hätte der Agent das Warenbündel $\left(0;\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, das wegen $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}>1$ nicht mehr auf der ursprünglichen Isovalen liegt. Die charakteristische Eigenschaft der nichteuklidischen Metrik des Warenbündelwertraumes ist aber gerade, dass nicht nur - um bei unserem Beispiel zu bleiben - die Warenbündel (1,5;0,75) und (1;1) den gleichen Wert besitzen, sondern dass einzelne Komponenten separat getauscht werden können, ohne dass sich der Wert des Warenbündels ändert: Angenommen, ein Agent mit dem Warenbündel (1,5 Eisen;0,75 Korn) tauscht von den 1,5 Eisen 0,5 gegen 0,25 Korn ein; dann hat er das Warenbündel (1;1), was auf derselben Isovalen liegt.

Metriken vom Typ $d(x,y)=|\alpha\Delta x+\beta\Delta y|$ kommen z.B. in der Energieerhaltung vor. All diese formalen Eigenschaften von Warenbündeln sprechen dafür, das Wertgesetz als Erhaltungssatz zu formulieren: *Bei jedem Austausch von Waren bleibt der Wert, verstanden als gesellschaftlich notwendiges Arbeitsquantum für ihre Herstellung, erhalten.* Damit teilt das Wertgesetz den Charakter jeden anderen wissenschaftlichen Gesetzes: Es hat eine präzise Bedeutung und es ist empirisch überprüfbar.[20]

2.3 Empirische Überprüfung

Was die empirische Überprüfung des Wertgesetzes betrifft, beschränken wir uns hier auf die Darstellung des grundlegenden methodischen Problems und seiner Lösung.

Um die sektoriellen Arbeitsquanten auszurechnen, benötigen wir die intersektoriellen Flüsse in Naturalform und die direkt verausgabte Arbeitszeit. Das Problem ist aber, dass uns unter kapitalistischen Verhältnissen die intersektoriellen Flüsse nur in monetärer Form und ebenso die direkte Arbeitszeit in Form von Löhnen zur Verfügung steht.[21]

Nun lässt sich sagen, dass

1. Das Quantum direkter Arbeitszeit in den einzelnen Sektoren *grosso modo* linear den Löhnen entspricht.

2. Es ist egal, ob man mit Naturalflüssen oder monetären Flüssen rechnet, denn die intersektoriellen Arbeitsquanten, die wir aus den monetären Flüssen erhalten, stimmen bis auf einen skalaren Faktor überein mit denjenigen, die wir aus den Naturalflüssen erhalten würden (wenn wir sie denn hätten).

Zur ersten Aussage: Wir gehen, wie seit Adam Smith üblich, von einer einheitlichen Mehrwertrate aus. Wenn auch noch die Löhne in den unterschiedlichen Sektoren gleich wären, hätten wir überhaupt kein Problem, denn dann wären die direkte Arbeitszeit und die Löhne durch einen linearen Faktor ver-

[20] Cockshott/Cottrell (2000)

[21] Wenngleich es seit den 90er Jahren auch Bemühungen um physische Input-Output-Tabellen gibt und für Deutschland, Dänemark und Italien erste Ergebnisse vorliegen - allerdings in so hochaggregierter Form, dass sie für unsere Zwecke ungeeignet sind. Siehe Hartard, Susanne u.a. (2000) oder folgende Website des Statistischen Bundesamtes: *http://www.destatis.de/presse/deutsch/pm2000/einl_input_output.htm*

bunden. Dabei brauchen wir die Mehrwertrate selbst gar nicht zu kennen, denn die Korrelation zweier Größen ist invariant gegenüber einem linearen Faktor.

Ein tatsächliches Problem ergibt sich durch die unterschiedlichen Löhne. Auf die Frage, wie die intersektoriellen Lohndifferenzen mit der unterschiedlichen „Wertschöpfung“ der Arbeitskraft zusammenhängt, gibt es zwei mögliche Antworten[22]: a) Die innersektoriellen Lohndifferenzen haben nichts zu tun mit unterschiedlichen Wertdifferenzen und es wäre falsch, die Werte auf der Basis der Löhne zu ermitteln. b) Innersektorielle Lohndifferenzen spiegeln Wertdifferenzen exakt wider, weil die Lohndifferenz sich aus der unterschiedlichen Ausbildungszeit der Arbeitskraft ergibt und eine qualifizierte Arbeitskraft mehr Wert pro Zeiteinheit erzeugt.

Die Wahrheit liegt sicherlich zwischen diesen beiden Polen. Man kann davon ausgehen, dass die Abweichungen der Lohndifferenzen von den Wertdifferenzen sich in der Verflechtung der unterschiedlichen Sektoren gegenseitig aufheben.

Die zweite Aussage lässt sich beweisen (s. Anhang). Es ist also nicht so, wie es zunächst den Anschein hat, dass wir uns in einem Zirkel bewegen, wenn wir auf der Grundlage von Werten, die wir aus Daten in monetärer Form gewonnen haben, Preise erklären wollen.

Cockshott/Cottrell/Michaelson testen die Hypothese des Wertgesetzes anhand der britischen Input-Output-Tabellen und stellten eine hohe Korrelation zwischen Werten und Preisen fest.[23] Andere Untersuchungen führten zu ähnlichen Ergebnissen.[24]

Wie sind diese Ergebnisse mit dem Tatbestand verträglich, dass sich, wenn einheitliche Mehrwert- und Profitraten unterstellt werden, die Waren - bei unterschiedlicher organischer Zusammensetzung des Kapitals - nicht zu ihrem Wert, sondern zu ihren Produktionspreisen austauschen? Es ist die Annahme einer einheitlichen Profitrate, die stark in Zweifel zu ziehen ist. Vielmehr scheint es so zu sein, dass von einer relativ stabilen Wahrscheinlichkeitsverteilung unterschiedlicher Profitraten auszugehen ist.[25] Wenn sich diese Ergebnisse erhärten, verläuft der Warenaustausch tatsächlich eher nach Band 1 des „Kapital“ als nach Band 3, das Wertgesetz wäre in der oben formulierten Weise empirisch bestätigt und das Transformationsproblem würde sich - freilich in ganz anderem Sinn als die Neo-Ricordianer meinen - gar nicht erst stellen.

2.4 Die Vergänglichkeit des Wertes

Die Auflösung der warenproduzierenden Produktionsweise fällt nicht vom Himmel, sondern ist im Schoße ihrer höchstentwickelten Form, dem Kapitalismus, bereits herangereift. Denn neben der gesellschaftlichen Teillung der Arbeit, die über den Tausch auf dem Markt stattfindet und bei der *im Nachhinein* die

[22] vgl. Cockshott/Cottrell (1997)

[23] Cockshott/Cottrell/Michaelson (1995).

[24] Cockshott/Cottrell verweisen auf Shaikh (1984), der aus Input-Output-Tabellen der USA und Italiens ähnliche Ergebnisse herleitete, und an anderer Stelle auf Valle Baeza, A. (1994), Correspondence between labor values and prices: a new approach, Review of Radical Political Economics, vol.26, no. 2, pp. 57-66; Ochoa, E.M. (1989), Value, prices, and wage-profit curves in the US economy, Cambridge Journal of Economics, 26, pp, 299-311; Petrovic, P. (1987), The deviation of production prices from labour values: some methodology and empirical evidence, Cambridge Journal of Economics, vol. 11, no.3, September, pp.197-210.

[25] Bahnbrechend für einen stochastischen Ansatz, der die Analyse der Beziehungen der relevanten Variablen durch eine Analyse der relevanten Wahrscheinlichkeitsverteilungen ersetzt, war Farjoun; Machover (1983), Laws of Chaos, London

gesellschaftliche Notwendigkeit evaluiert wird, gibt es eine vor der Produktion nach einem Plan: die Produktionsabläufe innerhalb einer Fabrik oder eines Konzerns. Die Produkte nehmen hier keinen Warencharakter an, sind aber eingebettet in der Tauschform; so wie die kooperative Form der Produktion der untergegangenen sozialistischen Länder eingebettet war in die Tauschform des Weltmarktes. Ferner haben wir gesehen, dass die gesellschaftlichen Teilarbeiten auch im Kapitalismus bereits einem gemeinsamen Maß unterworfen sind: der Arbeitszeit. Nur, es ist nicht die tatsächlich verausgabte Arbeitszeit, sondern die „fortwährend auf ihr gesellschaftlich proportioniertes Maß reduzierte.“[26] Der Mangel dieses Ökonomietypus spiegelt sich im Kontrast zwischen globaler Irrationalität und betriebswirtschaftlicher Effektivität wider. Um die überkommene Regulierung der Produktion durch den Wert überflüssig zu machen, müssen wir die Produktion (nicht nur einer Fabrik, sondern der gesamten Volkswirtschaft) planen, d.h. a priori Kenntnisse über sie haben. Die einzig mögliche Vermessungseinheit ist die Arbeitszeit.

3 Arbeitszeitrechnung

3.1 Input-Output-Analyse

Die Aufgabe erscheint gewaltig. Wie soll man das in einem Produkt enthaltene Arbeitsquantum bestimmen, wenn man bedenkt, dass das gesuchte Arbeitsquantum ja nicht nur aus dem Quantum lebendiger Arbeit besteht, sondern auch aus Anteilen vergegenständlichter Arbeit, die in den Produktionsmitteln für dieses Produkt enthalten sind, die wiederum aus Anteilen vergenständlichter Arbeit in den Produktionsmitteln für die Produktionsmittel der Produktionsmittel, usw. enthalten sind? Wie kann man dem Problem der Heterogenität der Arbeit gerecht werden?

Das Standard-Instrumentarium, mit denen man solcher Art Verflechtungsprobleme in den Griff bekommen kann, ist die Input-Output-Analyse. Die Input-Output-Analyse ist eine Methode, die Reproduktion eines ökonomischen Systems zu beschreiben, die an das „Tableau économique“ von François Quesnay (1694-1774) und die Reproduktionsschemata von Marx (im 2. Band des „Kapital“) anschließt.

Ausgangspunkt ist eine Input-Output-Tabelle, die den Fluss von Gütern und Diensten innerhalb einer bestimmten Zeiteinheit beschreibt. Wir erläutern dies an dem Einführungsbeispiel, das Wassily Leontief[27], der Begründer der

[26] Marx (1968), S.54

[27] Wassily Leontief (1906-1999) entwickelte im unmittelbaren Anschluss an die Marxsche Analyse des gesellschaftlichen Reproduktionsprozesses die Input-Output-Analyse in der Diskussion zur Vorbereitung des ersten Fünfjahresplan der Sowjetunion, an der er, als erst 19-jähriger Ökonom, als Mitarbeiter der Staatlichen Kommission für Wirtschaftsplanung teilnahm. Leider verließ Leontief 1925 mit seiner Familie - oder seine Familie mit ihm - sein Land, wurde später Harvard-Professor und erhielt 1973 den Nobelpreis für Wirtschaft. Diese Biographie ist wohl der Grund dafür, dass das Verhältnis von Ökonomen in den sozialistischen Ländern zur Input-Output-Analyse ambivalent war. Während der polnische Ökonom Oskar Lange 1958 selbst eine Einführung in die Input-Output-Analyse schrieb (Lange (1958)) und Georg Klaus darauf verwies, dass „keinerlei Veranlassung für die Ökonomen des Imperialismus (besteht) diese neuen Methoden, was ihren geistigen Ursprung betrifft, für sich in Anspruch zu nehmen“ (Klaus (1964)), lesen wir im „Ökonomischen Lexikon“ der DDR von 1969, S.964: „Infolge der zugrunde liegenden Konzeption der bürgerlichen Ökonomie kann jedoch die Input-Output-Analyse die grundsätzlichen ökonomischen Zusammenhänge der Volkswirtschaft nicht aufdecken.“

Input-Output-Analyse, in dem grundlegenden Text „Input-Output-Analysis“[28] gewählt hat.

Sei eine Volkswirtschaft gegeben, die aus 3 Sektoren besteht: Landwirtschaft, Manufaktur und Haushalt (Nationaleinkommen).

	Sektor1 Landwirtschaft	Sektor 2 Manufaktur	Sektor 3 Haushalt	Bruttooutput
Sektor 1 Landwirtsch.	25	20	55	100 Scheffel Weizen
Sektor 2 Manufaktur	14	6	30	50 Yards Stoff
Sektor 3 Haushalt	80	180	40	300 Mannjahre Arbeit

Tab.1

Zeile i gibt die Outputbeziehungen zu allen Sektoren j ($j = 1, 2, 3$) an. In der rechten Spalte steht jeweils der insgesamt entstandene Output. Spalte i ($i = 1, 2, 3$) gibt die Input-Beziehungen des Sektors i an. Wenn x_{ij} das Element in der i-ten Zeile und j-ten Spalte bezeichnet, gibt die Zahl x_{12} an, dass (von den 100 Scheffeln Weizen) 20 von der Manufaktur verbraucht werden bzw. dass die Manufaktur von der Landwirtschaft 20 Scheffel Weizen als Input erhalten hat; x_{11} gibt an, dass 25 Scheffel von demselben Sektor verbraucht werden und x_{13}, dass 55 Scheffel an den Haushalt, z.B. in Form von Löhnen, geht. Analog zeigt z.B. die 2. Spalte an, dass 20 Scheffel Weizen, 6 Yard Stoff und 180 Arbeitsstunden in die Manufaktur fließen.

Wenn man Tab.1 in Geldtermen aufschreibt, ergibt sich - unterstellt, dass 1 Scheffel Weizen 2 $, Manufakturgüter 5 $ pro Yard und ein Mannjahr 1 $ kosten - folgende Tabelle:

	Sektor1 Landwirtschaft	Sektor 2 Manufaktur	Sektor 3 Haushalt	Bruttooutput
Sektor 1 Landwirtsch.	50	40	110	200
Sektor 2 Manufaktur	70	30	150	250
Sektor 3 Haushalt	80	180	40	300
Gesamtinput	200	250	300	

Tab.2

Da alle Elemente jetzt in $ notiert sind, kann auch die Gesamtinputzeile hingeschrieben werden, während die Addition unterschiedlicher physikalischer Einheiten in Tab.1 keinen Sinn gehabt hätte.

[28]Leontief (1986), Reprint des Artikels *Input-Output Analysis* in der *Encyclopedia of Materials Science and Engeneering*, Oxford: Pergamon Press, 1985. Vorsicht, dieser Reprint enthält zahlreiche Fehler!

Wie verändert sich der intersektorielle Güterfluss und welcher Gesamtoutput für jeden Sektor ist erforderlich, wenn der Nachfragevektor $\vec{y} = \begin{pmatrix} 55 \\ 30 \end{pmatrix}$ sich verändert zu, sagen wir, $\vec{y} = \begin{pmatrix} 200 \\ 180 \end{pmatrix}$?

Oder, allgemeiner: Wie muss sich in der Tab.3 der Gesamtoutputvektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ der Sektoren x_i ändern, wenn der Nachfragevektor $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ sich ändert?

	Sektor1	Sektor 2	Endnachfrage	Bruttooutput
Sektor 1	x_{11}	x_{12}	y_1	x_1
Sektor 2	x_{21}	x_{22}	y_2	x_2

Tab.3

Diese Frage lässt sich mit Hilfe der so genannten *technischen Koeffizienten* beantworten. Sie drücken für den Sektor i den relativen Anteil des Sektors j am Gesamtoutput des Sektors i aus. Wenn der physikalische Gesamtoutput des Sektors i mit x_i bezeichnet wird, drückt der technische Koeffizient

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j} \tag{1}$$

den Anteil des Inputs, den Sektor j von Sektor i erhält, am Gesamtoutput des Sektors j aus. Die technischen Koeffizienten sind Größen, die in physikalischen Einheiten gemessen werden. So ergibt sich z. B. nach Tab.1 $a_{12} = x_{12}/x_2$, d.h. ein Input von 0,4 Scheffel Weizen pro Yard Stoff trägt zum Gesamtoutput von Stoff bei.

Nach obiger Fragestellung ergibt sich, wenn y_i die Endnachfrage für den Sektor i bezeichnet, die Koeffiziententabelle

0,25	0,4
0,14	0,12

Tab.4

und das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + y_1 &= x_1 \\ x_{21} + x_{22} + y_2 &= x_2 \quad . \end{aligned}$$

Unter Ausnutzung von (1) erhalten wir:

$$\begin{aligned} 0,25x_1 + 0,4x_2 + 200 &= x_1 \\ 0,14x_1 + 0,12x_2 + 180 &= x_2 \end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned} 0,75x_1 - 0,4x_2 &= 200 \\ -0,14x_1 + 0,88x_2 &= 180 \quad ; \end{aligned}$$

in Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} 0,75 & -0,4 \\ -0,14 & 0.88 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 180 \end{pmatrix} .$$

Als Lösung ergibt sich: $x_1 = 410,6$; $x_2 = 268,9$. Die zugehörigen intersektoriellen Flüsse x_{ij} lassen sich mit Hilfe von (1) zurückrechnen: $x_{11} = 0,25 \cdot 410,6 = 102,6$; $x_{12} = 0,4 \cdot 269,9 = 108$; usw.. Tab.5 zeigt die veränderte Input-Output-Tabelle.

	Sektor1 Landwirtschaft	Sektor 2 Manufaktur	Sektor 3 Haushalt	Bruttooutput
Sektor 1 Landwirtsch.	102,6	108	200	410,6
Sektor 2 Manufaktur	57,5	32,4	180	269,4

Tab.5

In Verallgemeinerung unseres Beispiels können wir festhalten: Sei eine Volkswirtschaft aufgeteilt in *n+1* Sektoren, wobei der *(n+1)*-te Sektor die Endnachfrage darstellt, x_i der Gesamtoutput des Sektors i und die intersektoriellen Flüssse durch die Tab.7 gegeben.

	1	2	$\cdots$	n	End-nachfrage	Brutto-output
1	x_{11}	x_{12}	$\cdots$	x_{1n}	y_1	x_1
2	x_{21}	x_{22}	$\cdots$	x_{2n}	y_2	x_2
$\vdots$						$\vdots$
n	x_{n1}	x_{n2}	$\cdots$	x_{nn}	y_n	x_n

Tab.7

Dann lässt sich das Gleichgewicht zwischen Gesamtoutput und dem zusammengesetzten Input für jeden Sektor durch das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} (x_1 - x_{11}) - x_{12} - \cdots - x_{1n} & = & y_1 \\ -x_{21} + (x_2 - x_{22}) - \cdots - x_{2n} & = & y_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots & = & \vdots \\ -x_{n1} - x_{n2} \cdots + (x_n - x_{nn}) & = & y_n \end{array}$$

beschreiben und unter Verwendung der technischen Koeffizienten (1) in das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} (1 - a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - \cdots a_{1n}x_n & = & y_1 \\ -a_{21}x_1 + (1 - a_{22})x_2 - \cdots - a_{2n}x_n & = & y_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots & = & \vdots \\ -a_{n1}x_1 - \cdots + (1 - a_{nn})x_n & = & y_n \end{array}$$

überführen.

In Matrixschreibweise:

$(I-A)\vec{x} = \vec{y}$, wobei I die n-te Einheitsmatrix ist. Den Lösungsvektor $\vec{x}$ erhält man dann durch Invertierung der Matrix $(I-A)$:

$$\vec{x} = (I-A)^{-1}\vec{y}.$$

$(I-A)$ heißt *Leontief-Matrix*.

3.2 Berechnung der Arbeitszeitquanten

Sei die Verflechtung

	Sektor1	Sektor 2	Sektor 3	Bruttooutput
Sektor 1	25	20	55	100 Scheffel Weizen
Sektor 2	14	6	30	50 Yards Stoff
Sektor 3	80	180	40	300 Mannjahre Arbeit

gegeben (vgl. Tab.1). (55 Scheffel Weizen und 30 Yards Stoff bilden die Endnachfrage.)

Für die Matrix A der technischen Koeffizienten ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} 0,25 & 0,4 \\ 0,14 & 0,12 \end{pmatrix}$$

Die direkte Arbeitszeit U_1 in Sektor 1 sei 80 und die direkte Arbeitszeit U_2 in Sektor 2 sei 180 Mannjahre. Für die direkte Arbeitszeit pro physikalischer Einheit u_1 in Sektor 1 gilt dann: $u_1 = 80/100 = 0,8$ und entsprechend $u_2 = 180/50 = 3,6$ in Sektor 2.

Die in einer physikalischen Einheit verkörperte Arbeitszeit in Sektor 1 bzw. in Sektor 2 sei v_1 bzw. v_2. Dann setzen sich im Bruttooutput der Sektoren 1 und 2 verkörperten Arbeitszeiten V_1 bzw. V_2 zusammen aus:

$$\begin{aligned} V_1 &= 100u_1 + 25v_1 + 14v_2 \\ V_2 &= u_2 + 20v_1 + 6v_2 \end{aligned}$$

Das ergibt pro physikalischer Einheit:

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1 + 0,25v_1 + 0,14v_2 \\ v_2 &= 50u_2 + 0,4v_1 + 0,12v_2 \end{aligned}$$

Verallgemeinert lässt sich der Sachverhalt so darstellen:

Sei v_i das Arbeitszeitquantum im Sektor i pro physikalischer Einheit und ui das Quantum lebendiger Arbeit in Sektor i pro physikalischer Einheit. Dann lassen sich die Arbeitszeitquanten v_i auf folgende Weise berechnen:

$$\vec{v} = \vec{u} + A^T\vec{v},$$

wobei $\vec{v}$ der Vektor mit den Komponenten v_i, $\vec{u}$ der Vektor mit den Komponenten $u_i \quad (i = 1, \cdots, n)$ und A^T die transponierte Matrix der technischen

Koeffizienten ist. Weiter folgt:

$$\begin{aligned} \vec{v} - A^T\vec{v} &= \vec{u} \\ (I - A^T)\vec{v} &= \vec{u} \\ \vec{v} &= (I - A^T)^{-1}\vec{u}. \end{aligned}$$

In unserm Beispiel ergibt sich mit $A^T = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,14 \\ 0,4 & 0,12 \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} I - A^T &= \begin{pmatrix} 0,75 & -0,14 \\ -0,4 & 0,88 \end{pmatrix} \\ (I - A^T)^{-1} &= \frac{1}{0,604} \begin{pmatrix} 0,88 & 0,14 \\ 0,4 & 0,75 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und somit

$$\vec{v} = \frac{1}{0,604} \begin{pmatrix} 0,88 & 0,14 \\ 0,4 & 0,75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,8 \\ 3,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Das heißt, in Sektor 1 verkörpert jede physikalische Einheit 2 Mj Arbeitszeit und entsprechend 5 Mj in Sektor 2.

Die Verflechtungstabelle der Arbeitszeiten (in Mannjahren) sie dann so aus:

	Sektor1	Sektor 2	Sektor 3	Bruttooutput
Sektor 1	50	40	55	200
Sektor 2	70	30	150	250
Sektor 3	80	180	40	300

3.3 Heterogenität der Arbeit

Zur Planung und Berechnung der sozialen Kosten von Projekten auf der Grundlage von Arbeitszeitrechnung kommt man nicht umhin zwischen einfacher und qualifizierterer Arbeit zu differenzieren; qualifiziertere Arbeit kostet die Gesellschaft mehr als einfache. Analog zur Berechnung des Anteils vergangener Arbeit, der von der in der Maschine vergegenständlichen während der Produktion auf das produzierte Teil übertragen wird, lässt sich die Übertragungsrate für die Arbeit z.B. eines Ingenieurs dadurch berechnen, dass man die für seine Ausbildung erforderliche Arbeitszeit durch die Arbeitszeit bis zum Verschleiß seiner Kenntnisse und Fertigkeiten dividiert. Wie kann man dabei dem Problem der Inhomogenität der Arbeit gerecht werden?

Legen wir z.B. für die Berechnung der Bewertung der in einer qualifizierten Arbeitskraft verkörperten (vergangenen) Arbeit (dem „Produktionsinput“) folgende Annahmen zu Grunde:

(1) 4 Jahre Studium, 40 h pro Woche, 45 Wochen pro Jahr; das macht 7200 h.

(2) Dabei wurde die auszubildende Arbeitskraft von einem Ausbilder unterrichtet bei 15 h pro Woche, 35 Wochen im Jahr bei einer Klassengröße von 30. Das macht pro Auszubildenden 70 h. Ferner Einzelunterricht mit 2 h pro Woche, 30 Wochen im Jahr. Das macht in 4 Jahren 240 h.

(3) Für die von der Gesellschaft zur Verfügung gestellte Infrastruktur (Büchereien, Verwaltung, usw.) setzen wir 70 h an.

(1) ist einfache Arbeit, (2) ist qualifizierte Arbeit, (3) werde zur Hälfte als qualifizierte Arbeit gerechnet. Die qualifizierte Arbeit macht dann ungefähr 5% der insgesamt verausgabten Arbeitszeit $x_0$von, aufgerundet, 7600 h aus. Bei einer Verschleißzeit T von, sagen wir, 15 Jahren und einer Jahresarbeitszeit J von 1575 h ergibt sich zunächst die jährliche Übertragungsrate $r_0 = x_0/(J \cdot T) = 7600/(1575 \cdot 15) = 0,32$. Die tatsächlich verausgabte Arbeitszeit muss etwas länger sein; denn im qualifizierten Anteil des qualifizierenden Inputs steckt wiederum vergangene Arbeit. Nehmen wir an, dass die qualifizierende Arbeitskraft unter den gleichen Bedingungen qualifiziert wurde, müssen wir noch die Übertragungsrate des 5%-igen Anteils der qualifizierenden Arbeitskraft hinzunehmen. Diese Arbeitskraft sei wiederum unter gleichen Bedingungen qualifiziert worden, usw.. Dann ergibt sich für die tatsächlich verausgabte Gesamtarbeitszeit $x = x_0 + pr_0x_0 + (pr_0)^2 x_0 + \cdots = x_0 \frac{1}{1-pr_0}$ (geometrische Reihe). Für unsere Rechnung ergibt sich $x = 7724$ und als tatsächliche Übertragungsrate $r = 7724/(1575 \cdot 15) = 0,33$.

Im Unterschied zu einem produzierten Gut, in dem nur vergangenen Arbeit steckt, verausgabt unsere qualifizierte Arbeitskraft in einer Stunde eine Stunde lebendige Arbeit. Die Summe aus lebendiger und vergangener Arbeit ergibt 1,33. Dies ist der Faktor, mit dem die einfache Arbeitszeit multipliziert werden muss.

3.4 Das Problem der Komplexität

Schätzungen gehen davon aus, dass die Anzahl der Produkte in einer Volkswirtschaft in Größenordnung 10^7 (10 Millionen) liegt.[29] Eine $10^7 \times 10^7$-Matrix mit dem herkömmlichen Gaußschen Verfahren berechnen zu wollen, ist in der Tat hoffnungslos. Für die 10^{21} erforderlichen Multiplikationen benötigt selbst ein Multiprozessor 10^{11} Sekunden. (Man bedenke, das sind mehr als 3000 Jahre.) Durch iterative Verfahren und Ausnutzen der Tatsache, dass es sich dabei um so genannte schwach besetze Matrizen (mit vielen Nullen) handelt lässt sich die Komplexität von der Ordnung n^3 auf die Ordnung $n \, log \, n$ herunterdrücken. Eine $10^7 \times 10^7$-Matrix könnte dann mit einem Multiprozessor in 6 Sekunden bewältigt werden.

3.5 Naturressourcen

Ein tatsächliches Problem bleibt: der Umgang mit den natürlichen Ressourcen. Dass die Bewertung der Ressourcen durch Marktpreise genauso wenig zu lösen ist wie durch eine Arbeitszeitrechnung, ist ein schwacher Trost. Das Problem ist nur auf der Ebene strategischer Planentscheidungen zu lösen. Hier gibt es in einer sozialistischen Ökonomie mehr Möglichkeiten weitsichtige Entscheidungen über Ressourcenverbrauch zu treffen als innerhalb des Horizontes partikulärer Interessen an Profitmaximierung.

[29] Laut Yun (1988) lag die Anzahl der Produkte in der Sowjetunion der 80er Jahre bei 24 Millionen. GOSPLAN konnte in seinen Jahresplänen nur 2000 Produkte verarbeiten. Auf der Basis von Rechnungen der GOSSNAB (oberste staatliche Versorgungsbehörde) und der Industrieministerien kam man auf ungefähr 200.000, also noch nicht einmal 1 % der vorhandenen Produkte. (Cockshott/Cottrell (1998)

3.6 Defizite

Das vorgeschlagene Modell hat zwar einen bei weitem höheren Rationalitätsgrad als jede Warenproduktion, kann dennoch aber nur ein erster Schritt in eine qualitativ neue Produktionsweise sein, wenn man sich folgende Defizite vor Augen hält: die Input-Output-Analyse ist im Wesentlichen statisch. Es gibt zwar Modelle auf der Basis von Differenzengleichungen. Aber praktikable Modelle auf der Basis von Differentialgleichungen sind mir nicht bekannt. Das vorgeschlagene Modell enthält, wie in ökonomischen Modellen üblich, ceteris paribus Annahmen, die die Exaktheit schmälern. Ferner enthalten komplexe Systeme wie die ökonomischen Selbstorganisationsaspekte, die durch die vorgeschlagenen Verfahren in keiner Weise zum Tragen kommen.

4 Ausblick

Alle bisherige Ökonomie war eine Ökonomie der (Arbeits-)Zeit, auch die hier vorgeschlagene wird eine sein, obwohl das Ressourcenproblem bereits darauf verweist, dass dies auf längere Sicht nicht genügen wird. In einer warenproduzierenden Gesellschaft wird die Minimierung der Produktionszeit durch das Wertgesetz erzwungen, auf ineffektive und indirekte Weise. Die Minimierung der individuellen Produktionszeit (durch die Konkurrenz) setzt den Austausch nicht voraus. (Sie kann durch vergleichende Messung ermittelt werden.) Sie erfährt in der sozialistischen Produktion ihre Fortsetzung durch den „sozialistischen Wettbewerb“. Es sollten mehrere Fabriken für gleiche Produktionslinien eingerichtet werden um unterschiedliche Verfahren ausprobieren und vergleichen zu können. In der Minimierung der Gesamtproduktionszeit dagegen finden wir das genuin „Gesellschaftliche“: Erst nach dem Tausch wird das „proportionierte Maß“ gefunden und lässt sich der Wert bestimmen (aber nicht messen). Die kooperierende kommunistische Gemeinschaft hat diesen Umweg nicht nötig. Die tatsächlich verausgabte Arbeitszeit stimmt der minimierten Arbeitszeit überein, weil sie a priori bekannt ist. Das Wertgesetz lässt sich als eine spezifische, historische Form eines für alle Ökonomien der Zeit geltenden Erhaltungssatzes von Arbeitsquanten deuten. Der ganze Unterschied zur kommunistischen Produktionsweise steckt in dem unscheinbaren Adjektiv „gesellschaftlich notwendig“. Während die Warenproduzenten nur, nach Feststellung der gesellschaftlich notwendigen Arbeitsquanten, die Folgen ihres Tuns begutachten können, wissen die in Kooperation Produzierenden, was sie tun. Die Menschheitsgeschichte beginnt - allmählich.

Der menschheitsgeschichtliche Ort der Realisierung obiger Überlegungen ergibt sich aus der nachfolgenden Übersicht (Tab.8). Es bleibt freilich zu bedenken, dass diese „Kurzfassung der Menschheitsgeschichte“ selbst als eine mit allen Scheuklappen der Zeit behaftete Projektion von einem bestimmten Standort aus (nämlich von dem des durch die 3. Spalte gekennzeichneten) zu begreifen ist. Denn dass man mit „Gottesaugen“ auf die Welt sehen könne, daran glaubt heute nun wirklich keiner mehr.

T $\longrightarrow$ historische Zeit

Tab.8

(*) Dass ich für die Urgemeinschaft keinen Erhaltungssatz gefunden habe, erklärt sich vielleicht aus den dort fehlenden Systemeigenschaften.

menschliche Agglomeration	Gemeinschaft	Gesellschaft	Kommunistische Gemeinschaft (1.Stufe)
Eigentumsformen	gemeinschaftliches Eigentum	v.a. Privateigentum	unterschiedliche Formen von Gemeineigentum
konstituierende Organisationseigenschaft	Kooperation	Austausch	abstrakte Kooperation
Kommunikation	direkte Absprache mit den „5 Sinnen“	Markt	direkte Absprache mit Hilfe instrumenteller Fortsetzung der Sinne (v.a. durch Computer)(Plan)
Dingverhältnis	Nützlichkeit des Dings	Tauschfähigkeit des Dings(Ware)	Nützlichkeit des Dings
Aneignung/Verteilung mittels	konkrete Arbeit	abstrakte Arbeit	abstrakte Arbeit
Erhaltungssatz	- (*)	gesellschaftlich notwendige Arbeitszeitquanten bleiben (beim Austausch) erhalten (Wertgesetz)	tatsächliche Arbeitszeitquanten bleiben erhalten

Anhang

Satz: Sei eine Input-Output-Tafel in monetärer Form gegeben. Dann stimmt, unabhängig davon, welcher Preisvektor benutzt wird, der aus ihr errechnete Vektor der aggregierten sektoralen Arbeitswerte bis auf einen linearen Faktor, nämlich der Lohnquote, mit dem Vektor überein, der aus einer physikalischen Tafel errechnet würde (wenn wir sie denn hätten).

Wir illustrieren zunächst die Behauptung anhand unseres Beispiels.

Sei $Y = \begin{pmatrix} 25 & 14 \\ 20 & 6 \end{pmatrix}$ die Matrix der intersektoralen physikalischen Flüsse, wobei y_{ij} den Fluss von Sektor j nach Sektor i anzeigt, und $q = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \end{pmatrix}$ der Bruttooutputvektor. Ferner sei $l = \begin{pmatrix} 80 \\ 180 \end{pmatrix}$ der Vektor der direkten sektoralen Arbeitszeiten. Dann lässt sich Hilfe der Matrix $Q = \begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 50 \end{pmatrix}$, in deren Diagonale die Komponenten q_1 und q_2 des Outputvektors stehen, durch $A^T = Q^{-1}Y$ die (transponierte) Matrix der technischen Koeffizienten ausdrücken:

$$A^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{100} & 0 \\ 0 & \frac{1}{50} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25 & 14 \\ 20 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,14 \\ 0,4 & 0,12 \end{pmatrix};$$

und der durch $\vec{u} = Q^{-1}Y$ gebildete Vektor $\vec{u}$,

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{1}{100} & 0 \\ 0 & \frac{1}{50} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 80 \\ 180 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 \\ 3,6 \end{pmatrix}$$

gibt die direkten Arbeitszeiten pro physikalischer Einheit an. Der Vektor $\vec{v}$ der sektoralen Arbeitszeiten pro physikalischer Einheit ergibt sich dann, wie in 3.2 gezeigt, durch $\vec{v} = (I - A^T)^{-1}\vec{u}$.

Hier ergibt sich

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \begin{pmatrix} 0,75 & -0,14 \\ -0,4 & 0,88 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0,8 \\ 3,6 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{0,604} \begin{pmatrix} 0,88 & 0,14 \\ 0,4 & 0,75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,8 \\ 3,6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dadurch ergibt sich der Vektor $\vec{V}$ der aggregierten sektoralen Arbeitszeiten durch

$$\vec{V} = Q\vec{v} = \begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 250 \end{pmatrix}.$$

Nun gehen wir von einer monetären Tafel aus (wie in Tab.2). Der dort angegebene Preisvektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ stimmt mit unserm Arbeitszeitvektor überein. Was passiert, wenn wir einen anderen Preisvektor, sagen wir $\vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$?

Sei P die Matrix, in deren Diagonale die Komponenten von $\vec{p}$ stehen: $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$. Dann gibt die Matrix $\hat{Y} = YP$ die sektoralen Geldflüsse an:

$$\hat{Y} = \begin{pmatrix} 25 & 14 \\ 20 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 & 80 \\ 80 & 36 \end{pmatrix},$$

und $\vec{\hat{q}} = P\vec{q}$ den monetären Outputvektor:

$$\vec{\hat{q}} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 400 \\ 300 \end{pmatrix} \qquad (vgl. Tab.2).$$

Sei w=10 die einheitliche Lohnquote. Dann gibt der Vektor $\vec{\hat{l}} = w\vec{l} = 10 \begin{pmatrix} 80 \\ 180 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 800 \\ 1800 \end{pmatrix}$ die sektoralen Löhne an.

Wir konstruieren nun mit $\hat{A}^T$ das monetäre Gegenstück zur (transponierten) Matrix der technischen Koeffizienten. Dabei soll $\hat{a}^T_{ij}$ angeben, wie viel Geldeinheiten aus Sektor j zum Output des Sektors i pro Geldeinheit beitragen. Dazu definieren wir durch $\hat{Q} = QP$ die Matrix $\hat{Q}$, in deren Diagonale die sektoralen Bruttooutputs in monetärer Form stehen:

$$\hat{Q} = \begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 400 & 0 \\ 0 & 300 \end{pmatrix}.$$

Dann erhalten wir $\hat{A}$ durch $\hat{Q}^{-1}\hat{Y}$:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{400} & 0 \\ 0 & \frac{1}{300} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 & 84 \\ 80 & 36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,21 \\ 0,2667 & 0,12 \end{pmatrix}.$$

Das monetäre Gegenstück zu $\vec{u}, \vec{\hat{u}}$, das die sektoralen Lohnkosten (d.h. die Kosten für die direkte Arbeit) pro Geldeinheit des Output angibt, erhalten wir durch

$$\vec{\hat{u}} = \hat{Q}^{-1}\vec{\hat{l}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{400} & 0 \\ 0 & \frac{1}{300} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 800 \\ 1800 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir schließlich das monetäre Gegenstück zu $\vec{v}$, den Vektor $\vec{\hat{v}}$, dessen Komponenten die sektoralen Arbeitskosten pro Geldeinheit des Output repräsentieren, durch $\vec{\hat{v}} = \left(I - \hat{A}^T\right)^{-1} \vec{\hat{u}}$:

$$\vec{\hat{v}} = \begin{pmatrix} 1,45695 & 0,34768 \\ 0,4415 & 1,24172 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{0,604} \begin{pmatrix} 5 \\ 8,333 \end{pmatrix}$$

und somit die monetären sektorialen Arbeitskosten $\vec{\hat{V}}$ durch

$$\vec{\hat{V}} = \hat{Q}\vec{\hat{v}} = \begin{pmatrix} 400 & 0 \\ 0 & 300 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 8,333 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2000 \\ 2500 \end{pmatrix}.$$

Der Zusammenhang zwischen $\vec{\hat{V}}$ und $\vec{V}$ ist hier also durch

$$\vec{\hat{V}} = 10\vec{V} = w\vec{V}$$

gegeben.

***

Nun der formale Beweis:

Sei Y eine $n \times n$-Matrix, deren Elemente y_{ij} den Beitrag des Sektors j für den Bruttooutput des Sektors i, in physikalischer Form, repräsentieren;
q ein n-Vektor der sektoralen Bruttooutputs;
l ein n-Vektor, der die direkten Arbeitszeiten in den einzelnen Sektoren angibt;
Q eine $n \times n$-Diagonalmatrix, die durch

$$Q_{ij} = \begin{cases} q_i & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{definiert ist.}$$

Dann erhalten wir die (transponierte) Matrix A^T der technischen Koeffizienten durch

$$A^T = Q^{-1}Y$$

und den Vektor $\vec{u}$ der direkten sektoralen Arbeitszeiten pro physikalischer Einheit durch

$$\vec{u} = Q^{-1}l.$$

Wie in 3.2 gezeigt, erhält man den n-Vektor $\vec{v}$ der sektoralen Arbeit pro physikalischer Einheit durch

$$\vec{v} = (I - A^T)^{-1}\vec{u}$$

und den n-Vektor $\vec{V}$ der aggregierten sektoralen Arbeitszeiten durch

$$\begin{aligned} \vec{V} &= Q\vec{v} \\ &= Q(I - A^T)^{-1}\vec{u}. \end{aligned} \tag{1}$$

Im monetären Gegenstück sei
$\vec{p}$ der n-Vektor für die Warenpreise pro physikalischer Einheit;
w ein Skalar, der die (gemeinsame) Lohnquote angibt.
Ferner definieren wir eine $n \times n$-Diagonalmatrix P durch

$$P_{ij} = \begin{cases} p_i & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Dann gibt die $n \times n$-Matrix

$$\hat{Y} = YP$$

die intersektoralen Flüsse in Geldform an,

$$\vec{\hat{q}} = P\vec{q}$$

den n-Vektor der Bruttooutputs in Geldform und

$$\vec{\hat{l}} = w\vec{l}$$

den n-Vektor der sektoralen Löhne.

Das monetäre Gegenstück $\hat{Q}$ zu Q erhalten wir durch die $n{\times}n$-Diagonalmatrix

$$\hat{Q} = QP, \tag{2}$$

in deren Diagonale die sektoralen Bruttooutputs in monetärer Form stehen, das monetäre Gegenstück $\hat{A}^T$ durch

$$\hat{A}^T = \hat{Q}^{-1}\hat{Y}$$

und das monetäre Gegenstück $\vec{\hat{u}}$ durch

$$\vec{\hat{u}} = \hat{Q}^{-1}\vec{\hat{l}},$$

sodass sich schließlich der n-Vektor $\vec{\hat{v}}$, dessen Komponenten die sektoralen Arbeitskosten pro Geldeinheit des Output repräsentieren, durch

$$\vec{\hat{v}} = (I - \hat{A}^T)^{-1}\vec{\hat{u}}$$

und der n-Vektor $\vec{\hat{V}}$, der die aggregierten sektoralen Arbeitskosten angibt, durch

$$\begin{aligned} \vec{\hat{V}} &= \hat{Q}\vec{\hat{v}} \\ &= \hat{Q}(I - \hat{A}^T)^{-1}\vec{\hat{u}} \end{aligned} \tag{3}$$

berechnen lässt.

Behauptet wird, dass $\vec{V}$, gegeben durch (1), und $\vec{\hat{V}}$, gegeben durch (3), durch die Beziehung $\vec{\hat{V}} = w\vec{V}$ zusammenhängen. Dazu führen wir die rechte Seite der Gleichung (3) auf Terme in Arbeitszeiten zurück.

Zunächst stellen wir fest, dass

$$\begin{aligned}\vec{\hat{u}} &= \hat{Q}^{-1}\vec{\hat{l}} \\ &= (QP)^{-1}w\vec{l} \\ &= wP^{-1}Q^{-1}\vec{l},\end{aligned}$$

mithin

$$\vec{\hat{u}} = wP^{-1}\vec{u} \tag{4}$$

und

$$\begin{aligned}\hat{A}^T &= \hat{Q}^{-1}\hat{Y} \\ &= (QP)^{-1}YP \\ &= P^{-1}Q^{-1}YP,\end{aligned}$$

mithin

$$\vec{\hat{A}}^T = P^{-1}A^TP \tag{5}$$

gilt. Mit (2), (4) und (5) lässt sich dann (3) schreiben als

$$\vec{\hat{V}} = QP\left(I - P^{-1}A^TP\right)^{-1}P^{-1}w\vec{u}.$$

Wenn die Behauptung $\vec{\hat{V}} = w\vec{V}$ stimmen soll, muss

$$(I - A^T)^{-1} = P\left(I - P^{-1}A^TP\right)^{-1}P^{-1}$$

gelten.

Inversion auf beiden Seiten liefert

$$I - A^T = P\left(I - P^{-1}A^TP\right)P^{-1}$$

und die Umformung der rechten Seite ergibt

$$(P - A^TP)P^{-1} = I - A^T,$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

Literaturverzeichnis

Cockshott, W. Paul; Cottrell, Allin (1993a): Calculation, Complexity And Planning: The Socialist Calculation Debate Once Again (*)

Cockshott, W. Paul; Cottrell, Allin (1993b): Towards a New Socialism, Nottingham (*), erscheint 2006 auf Deutsch im PapyRossa-Verlag

Cockshott, W. Paul; Cottrell, Allin (1997): The Scientific Status of the Labour Theory of Value (*)

Cockshott, W. Paul; Cottrell, Allin (1998): Un modèle de planification efficace (*)

Cockshott, W. Paul; Cottrell, Allin (2000): Value's Law, Value's Metric (*)

Cockshott, W. Paul; Cottrell, Allin; Michaelson, Greg (1995): Testing Marx: Some new results from UK data, in: Capital & Class 55 (Spring 1995), S.103-129
Hartard, Susanne; Stahmer, Carsten; Hinterberger, Friedrich (2000): Magische Dreiecke, Bd.1, Stoffflussanalysen und Nachhaltigkeitsindikatoren, Marburg
Heinrich, Michael (2001): Die Wissenschaft vom Wert, Münster
Klaus, Georg (1964): Kybernetik und Gesellschaft, Berlin
Lange, Oskar (1958): Einführung in die Ökonometrie (poln.), Warschau
Leontief, Wassily (1986): Input-Output Economics, New York - Oxford
Marx, K. (1968): MEW 23 (Kapital, Bd.1), Berlin
Marx, K. (1969): MEW 19, Berlin
Nemtschinow, Wassili S. (1965): Ökonomisch-mathematische Methoden und Modelle, Berlin
Quaas, Georg (2001): Arbeitsquantentheorie. Mathematische Grundlagen der Werttheorie, Frankfurt/M.
Shaikh, Anwar (1984): The transformation from Marx to Sraffa, in: A. Freeman u. E. Mandel (Hrg.): Ricardo, Marx, Sraffa, London
von Mises, Ludwig (1923) Die Wirtschaftsrechnung im sozialistischen Gemeinwesen, in: Archiv für Sozialwissenschaft und Sozialpolitik 47 (1920), S. 86-121
Yun,O. (1988): Improvement of Soviet Economic Planning, Moskau

Die durch (*) gekennzeichneten Texte sind herunter ladbar unter *http://www.HelmutDunkhase.de*